
Olimpiada Națională de Matematică**Etapa locală****7 februarie 2026****Subiecte clasa a XII-a****Subiectul 1 (21p)**

Pe mulțimea $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ se definește legea de

compoziție $x \circ y = x^{\log_2 y}$.

a) Să se demonstreze că (G, \circ) este grup abelian izomorf cu grupul (\mathbb{R}^*, \cdot) .

b) Să se determine numerele întregi m, n pentru care $2^m \circ 2^n = 2^{m+n}$.

Subiectul 2 (21p)

a) Să se arate că $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \in [-1, 1]$ pentru

orice $x, y \in [-1, 1]$.

b) Pe $[-1, 1]$ definim legea de compoziție $x \circ y = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$. Să se arate că legea admite element neutru și că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ pentru orice $x, y, z \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Subiectul 3 (21p)

Fie funcția $F_1: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F_1(x) = x(\ln x - 1)$,

$x > 0$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu F_{n+1} primitiva funcției F_n cu proprietatea că $\lim_{x \rightarrow 0} F_{n+1}(x) = 0$.

a) Să se arate că $F_n(x) = \frac{x^n}{n!} \left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right), n \in \mathbb{N}^*, x > 0$.

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot F_n(1)}{\ln n}$.

(GM)

Subiectul 4 (21p)

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea că există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $(b - a)f'(x) \leq k$ pentru orice $x \in [a, b]$. Să se demonstreze că $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{k}{2} + f(a)$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 16 puncte din oficiu.

Timpul efectiv de lucru este de trei ore.